

REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2001 **8**(1) : 33–46  
CIMPA – UCR – CCSS ISSN: 1409-2433

# ISOMORFISMO DE CONJUNTOS DE RELACIONES<sup>\*</sup>

MIJAIL BULAT<sup>\*\*</sup>

*Recibido: 16 Noviembre 1999*

---

## Abstract

It is recommended to use a solving method for relations sets in order to solve the isomorphism problem. This method allows to solve the same problem for big size graphs, homogeneous graphs, graph systems, k-signs logic functions and their systems.

**Keywords:** graphs isomorphism, graphs systems, equivalence systems, simple substitution, multiple substitution.

## Resumen

Se propone un método de solución del problema del isomorfismo para conjuntos de relaciones. El método permite resolver el mismo problema para grafos de grandes tamaños, grafos homogéneos, sistemas de grafos, funciones de lógicas de k-signos y sistemas de las mismas.

**Palabras clave:** isomorfismo de grafos, sistemas de grafos, sistemas de equivalencias, sustitución simple, sustitución múltiple.

**Mathematics Subject Classification:** 05C60, 68R10

## 1. Introducción

La resolución del problema del isomorfismo de grafos se complica cuando los grafos son de grandes tamaños o sus matrices de adyacencias son homogéneas [1, 3, 5, 6]. En ambos casos el problema se resuelve más fácil presentando los grafos por un conjunto de relaciones correspondientes a matrices de tamaños razonables y no homogéneas. Con tal presentación aumenta el número de restricciones que permiten eliminar muchas variantes y con esto

---

<sup>\*</sup>El artículo fue enviado cuando el autor trabajaba en Universidad Americana, Managua, Nicaragua

<sup>\*\*</sup>Facultatea de Matematica si Informatica, Universitatea de Stat din Moldova, Str. A Mateevici, 60, Chisinau, Moldavia. E-Mail: bulat@araximfo.com

facilita la resolución del problema. En este trabajo se resuelve el problema del isomorfismo para tales conjuntos y se dan las aplicaciones de éstos en grafos y en funciones lógicas. Ya que cualquier sistema de grafos o hipergrafos es un conjunto de relaciones, entonces se puede resolver el problema del isomorfismo para tales sistemas.

## 2. Sistemas de equivalencias

Dado el conjunto  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ , donde  $X_1 = \{x_{11}, \dots, x_{m_1 1}\}, \dots, X_n = \{x_{1n}, \dots, x_{m_n n}\}$ . Sobre  $X$  por medio del conjunto  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_t\}$  están definidas las relaciones  $R_{X_i X_j}$

$$R_{X_i X_j} = \begin{matrix} & x_{1i} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{m_i i} \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & x_{m_i i} & & & & \cdot \end{matrix} \begin{bmatrix} x_{1j} & \dots & x_{m_j j} \\ r_{11}^{ij} & \dots & r_{1m_j}^{ij} \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ r_{m_i 1}^{ij} & \dots & r_{m_i m_j}^{ij} \end{bmatrix}, r_{11}^{ij}, \dots, r_{m_i m_j}^{ij} \in \Omega.$$

Designemos por  $R$  el conjunto de estas relaciones. Análogamente sobre otro conjunto  $X^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ , donde  $X_1^* = \{x_{11}^*, \dots, x_{m_1 1}^*\}, \dots, X_n^* = \{x_{1n}^*, \dots, x_{m_n n}^*\}$ , están definidas otras relaciones por medio del mismo conjunto  $\Omega$ . Designemos este conjunto de relaciones por  $R^*$ .

Sea  $S_{X, X^*}$  la sustitución en la primera fila de la cual están los elementos de  $X$  y en la segunda los de  $X^*$ :

$$S_{X, X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_{k_1}^* & X_{k_2}^* & \dots & X_{k_n}^* \end{pmatrix}, k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

Según esta sustitución componemos las equivalencias

$$R_{X_i X_j} \cong R_{X_{k_i}^* X_{k_j}^*} \quad (2)$$

$$\forall R_{X_i X_j} \in R, \forall R_{X_{k_i}^* X_{k_j}^*} \in R^*$$

Llamaremos este conjunto **sistema de equivalencias por la sustitución  $S_{X, X^*}$** .

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} X &= \{X_1, X_2, X_3\}, X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}, S_{X, X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_3^* & X_1^* & X_2^* \end{pmatrix}, \\ R &= \{R_{X_1 X_3}, R_{X_3 X_1}, R_{X_2 X_3}\} \text{ y } R^* = \{R_{X_3^* X_2^*}, R_{X_1^* X_2^*}, R_{X_2^* X_3^*}\} \end{aligned}$$

entonces el sistema de equivalencias por esta sustitución es:

$$\begin{cases} R_{X_1 X_3} \cong R_{X_3^* X_2^*} \\ R_{X_3 X_1} \cong R_{X_2^* X_3^*} \\ R_{X_2 X_3} \cong R_{X_1^* X_2^*} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_{X_1 X_{k_1}^*} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m_1 1} \\ x_{1 1 k_1}^* & x_{1 2 k_1}^* & \dots & x_{1 m_1 k_1}^* \end{pmatrix} \\ S_{X_2 X_{k_2}^*} &= \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m_2 2} \\ x_{2 1 k_2}^* & x_{2 2 k_2}^* & \dots & x_{2 m_2 k_2}^* \end{pmatrix} \\ &\dots\dots\dots \\ S_{X_n X_{k_n}^*} &= \begin{pmatrix} x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{m_n n} \\ x_{n 1 k_n}^* & x_{n 2 k_n}^* & \dots & x_{n m_n k_n}^* \end{pmatrix} \\ 1_1, \dots, n_{m_n} &\in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Si la solución existe, entonces el sistema se llama **compatible** y en el caso contrario **incompatible**.

$$R(S_{X_1 X_{k_1}^*}, \dots, S_{X_n, X_{k_n}^*}) = R^* \quad (3)$$

Este grafo tiene su matriz de adyacencias  $A_G$  con los elementos  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_{X_i X_j} \in R \\ 0, & \text{si } R_{X_i X_j} \notin R \end{cases}$  y su matriz  $A_{P_G}$  de los pesos de las aristas.

$$A_{P_G} = \begin{matrix} & X_1 & \cdots & X_n \\ X_1 & R_{X_1 X_1} & \cdots & R_{X_1 X_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_n & R_{X_n X_1} & \cdots & R_{X_n X_n} \end{matrix}$$

Igualmente al conjunto  $R^*$  corresponde un grafo  $G^*$  con su matriz de adyacencias  $A_{G^*}$  y con la matriz  $A_{P_{G^*}}$  de los pesos de las aristas. Si el sistema (1) es compatible entonces entre  $X$  y  $X^*$  se establece una correspondencia biunívoca. Para  $X_i \longleftrightarrow X_{k_i}$  y  $X_j \longleftrightarrow X_{k_j}$  debe verificarse la condición

$$R_{X_i X_j} \cong R_{X_{k_i}^* X_{k_j}^*} \quad (4)$$

Esto significa que  $G \cong G^*$  y también  $R \cong R^*$ . Para hallar el conjunto  $\{S_{X,X^*}\}$  de sustituciones por medio de las cuales se establece la correspondencia biunívoca entre los elementos de  $X$  y  $X^*$  hace falta resolver el problema de equivalencia para las matrices  $A_G$  y  $A_{G^*}$  [1]. Es evidente que si  $\{S_{X,X^*}\} = \emptyset$  entonces el sistema es incompatible y, por

consiguiente, los conjuntos no son isomorfos. Si  $\{S_{X,X^*}\} \neq \emptyset$  y  $\exists S_{X,X^*}$  por medio de la cual el sistema de equivalencias es compatible, entonces  $R \cong R^*$ . Para hallar la solución del sistema (2) escribimos la matriz  $A_{P_G}$  en la forma desarrollada y designamos sus filas y columnas respectivamente por  $y_1, \dots, y_q$  y  $z_1, \dots, z_q$ .

$$A_{P_G} = \begin{matrix} & & & z_1 & \cdots & z_{m_1} & \cdots & z_p & \cdots & z_q \\ & & & x_{11} & \cdots & x_{m_1 1} & \cdots & x_{1n} & \cdots & x_{m_n n} \\ y_1 & x_{11} & \left[ \begin{matrix} r_{11}^{11} & \cdots & r_{1m_1}^{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_1 1}^{11} & \cdots & r_{m_1 m_1}^{11} \end{matrix} \right] & \cdots & \left[ \begin{matrix} r_{11}^{1n} & \cdots & r_{1m_n}^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_1 1}^{1n} & \cdots & r_{m_1 m_n}^{1n} \end{matrix} \right] \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ y_{m_1} & x_{m_1 1} & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ y_p & x_{1n} & \left[ \begin{matrix} r_{11}^{n1} & \cdots & r_{1m_1}^{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_1 1}^{n1} & \cdots & r_{m_1 m_1}^{n1} \end{matrix} \right] & \cdots & \left[ \begin{matrix} r_{11}^{nn} & \cdots & r_{1m_n}^{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_1 1}^{nn} & \cdots & r_{m_1 m_n}^{nn} \end{matrix} \right] \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ y_q & x_{m_n n} & \left[ \begin{matrix} r_{m_n 1}^{n1} & \cdots & r_{m_n m_1}^{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_n 1}^{nn} & \cdots & r_{m_n m_n}^{nn} \end{matrix} \right] & \cdots & \left[ \begin{matrix} r_{m_n 1}^{nn} & \cdots & r_{m_n m_n}^{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m_n 1}^{nn} & \cdots & r_{m_n m_n}^{nn} \end{matrix} \right] \end{matrix} \right],$$

$$q = m_1 + \dots + m_n$$

Igualmente construimos la matriz desarrollada  $A_{P_{G^*}}$ . Para esta matriz aplicamos la sustitución (1) y la designamos por  $A_{P_{G^*}}^*$ . Para las filas y columnas de esta matriz usamos las mismas designaciones que para las de  $A_{P_G}$  (ver Ejemplo 1). Resolviendo el problema de equivalencia para  $A_{P_G}$  y  $A_{P_{G^*}}^*[1]$ , obtendremos la solución del sistema (2). Según (1) se obtienen las primeras sustituciones:

$$\hat{S}_{1;Y,Y} = \begin{pmatrix} \{y_1, \dots, y_{m_1}\} & \cdots & \{y_p, \dots, y_q\} \\ \{y_1, \dots, y_{m_1}\} & \cdots & \{y_p, \dots, y_q\} \end{pmatrix} \text{ y } \hat{S}_{1;Z,Z} = \begin{pmatrix} \{z_1, \dots, z_{m_1}\} & \cdots & \{z_p, \dots, z_q\} \\ \{z_1, \dots, z_{m_1}\} & \cdots & \{z_p, \dots, z_q\} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ya que por  $y_i$  e  $z_i$  está designado el mismo elemento del mismo conjunto entonces

$$y_i \longleftrightarrow y_j \iff z_i \longleftrightarrow z_j \quad (6)$$

Según [1] para que  $A_{P_G} \cong A_{P_{G^*}}^*$  es necesario y suficiente que se cumpla

$$\text{Lím} \tilde{S}_{1;Y,Y} = S_{Y,Y} \cong S_{Z,Z} = \text{Lím} \tilde{S}_{1;Z,Z} \quad (7)$$

Para despejar los elementos simples de las sustituciones (5) componemos las matrices  $B$  [1]. En la matriz  $B_Y$  el elemento  $b_{ij}^{kl}$  es igual a la multiplicidad del elemento  $\omega_j$  en la fila  $y_i$  de la matriz  $R_{X_k X_l}$  incluida en la matriz  $A_{P_G}$ . En la matriz  $B_Z$  el elemento  $b_{ij}^{kl}$  es igual a la multiplicidad del elemento  $\omega_i$  en la columna  $z_j$  de la matriz  $R_{X_k X_l}$  incluida en  $A_{P_G}$ . De la misma manera se construyen las matrices  $B_Y^*$  e  $B_Z^*$  por la matriz  $A_{P_{G^*}}^*$ .

$$\begin{aligned}
B_Z &= \begin{matrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_t \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_t \end{matrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_{m_1} \\ b_{11}^{11} & \cdots & b_{1m_1}^{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} z_p & \cdots & z_q \\ b_{1p}^{1n} & \cdots & r_{1q}^{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{t1}^{11} & \cdots & b_{tm_1}^{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{tp}^{1n} & \cdots & b_{tq}^{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11}^{n1} & \cdots & b_{1m_1}^{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{1p}^{nn} & \cdots & b_{1q}^{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{t1}^{n1} & \cdots & b_{tm_1}^{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{tp}^{nn} & \cdots & b_{tq}^{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
B_Y &= \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_1} \\ \vdots \\ y_p \\ \vdots \\ y_q \end{matrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_t \\ b_{11}^{11} & \cdots & b_{1t}^{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_t \\ b_{11}^{1n} & \cdots & r_{1t}^{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{m_1 1}^{11} & \cdots & b_{m_1 t}^{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{m_1 1}^{1n} & \cdots & b_{m_1 t}^{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{p1}^{n1} & \cdots & b_{pt}^{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{p1}^{nn} & \cdots & b_{pt}^{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} & \ddots & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{q1}^{n1} & \cdots & b_{qt}^{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{q1}^{nn} & \cdots & b_{qt}^{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Comparando  $B_Y$  con  $B_Y^*$ ,  $B_Z$  con  $B_Z^*$ , despejamos elementos simples en las sustituciones (5) y componemos las sustituciones

$$\hat{S}_{2;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_{a_1} & \cdots & y_{a_r} & \{y_{b_1}, \dots, y_{b_h}\} & \cdots & \{y_{c_1}, \dots, y_{c_s}\} \\ y_{a_1}^* & \cdots & y_{a_r}^* & \{y_{b_1}^*, \dots, y_{b_h}^*\} & \cdots & \{y_{c_1}^*, \dots, y_{c_s}^*\} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{S}_{2;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_{d_1} & \cdots & z_{d_g} & \{z_{e_1}, \dots, z_{e_k}\} & \cdots & \{z_{f_1}, \dots, z_{f_l}\} \\ z_{d_1}^* & \cdots & z_{d_g}^* & \{z_{e_1}^*, \dots, z_{e_k}^*\} & \cdots & \{z_{f_1}^*, \dots, z_{f_l}^*\} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Designando

$$\{y_{b_1}, \dots, y_{b_h}\} = M_{1,y}, \dots, \{y_{c_1}, \dots, y_{c_s}\} = M_{u,y}, \{y_{b_1}^*, \dots, y_{b_h}^*\} = M_{1,y}^*, \dots, \{y_{c_1}^*, \dots, y_{c_s}^*\} = M_{u,y}^*$$

$$\{z_{e_1}, \dots, z_{e_k}\} = M_{1,z}, \dots, \{z_{f_1}, \dots, z_{f_l}\} = M_{v,z}, \{z_{e_1}^*, \dots, z_{e_k}^*\} = M_{1,z}^*, \dots, \{z_{f_1}^*, \dots, z_{f_l}^*\} = M_{v,z}^*$$

obtendremos

$$\tilde{S}_{2;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_{a_1} & \cdots & y_{a_r} & M_{1,y} & \cdots & M_{u,y} \\ y_{a_1}^* & \cdots & y_{a_r}^* & M_{1,y}^* & \cdots & M_{u,y}^* \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{S}_{2;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_{d_1} & \cdots & z_{d_g} & M_{1,z} & \cdots & M_{v,z} \\ z_{d_1}^* & \cdots & z_{d_g}^* & M_{1,z}^* & \cdots & M_{v,z}^* \end{pmatrix} \quad (11)$$

Designemos tambien por  $N_{i,y}, N_{j,z}, N_{i,y}^*, N_{j,z}^*$  los conjuntos de los subíndices de los elementos de  $M_{i,y}, M_{j,z}, M_{i,y}^*, M_{j,z}^*$  respectivamente. Según (6) y (7) debe cumplirse la igualdad

$$\forall i, j \mid N_{i,y} \cap N_{j,z} \mid = \mid N_{i,y}^* \cap N_{j,z}^* \mid, \quad (12)$$

$$i \in \{1, \dots, u\}, j \in \{1, \dots, v\}$$

Si esta condición no se cumple por lo menos para un par  $(i, j)$  entonces la hipótesis según la cual se obtuvieron las sustituciones (10) y (11) es falsa.

Supongamos que (12) se cumplen. En este caso se realizan las correspondencias

$$\forall i, j N_{i,y} \cap N_{j,z} \longleftrightarrow N_{i,y}^* \cap N_{j,z}^* \quad (13)$$

$$\forall i, j N_{i,y} \setminus (N_{i,y} \cap N_{j,z}) \longleftrightarrow N_{i,y}^* \setminus (N_{i,y}^* \cap N_{j,z}^*) \quad (14)$$

$$\forall i, j N_{j,z} \setminus (N_{i,y} \cap N_{j,z}) \longleftrightarrow N_{j,z}^* \setminus (N_{i,y}^* \cap N_{j,z}^*) \quad (15)$$

Por medio de estas correspondencias se transforman los conjuntos  $M$  de las sustituciones (10) y (11). Si, por ejemplo,  $M_{i,y} = \{y_1, y_3, y_4\}$ ,  $M_{j,z} = \{z_1, z_2, z_4\}$ ,  $M_{i,y}^* = \{y_4, y_5, y_6\}$ ,  $M_{j,z}^* = \{z_3, z_5, z_6\}$ , entonces según (13), (14) y (15) se realizan respectivamente las correspondencias  $\{1, 4\} \longleftrightarrow \{5, 6\}$ ,  $\{3\} \longleftrightarrow \{4\}$  y  $\{2\} \longleftrightarrow \{3\}$ . Estas correspondencias implican las correspondencias  $\{y_1, y_4\} \longleftrightarrow \{y_5, y_6\}$ ,  $\{z_1, z_4\} \longleftrightarrow \{z_5, z_6\}$ ,  $\{y_3\} \longleftrightarrow \{y_4\}$ ,  $\{z_2\} \longleftrightarrow \{z_3\}$ . De esta manera se obtienen otros conjuntos  $M$ . Los conjuntos  $M$  pueden transformarse también por medio de los elementos simples. Supongamos que se cumple (16)

$$\{a_1, \dots, a_r\} \neq \{d_1, \dots, d_g\} \quad (16)$$

Según (6) los elementos de la diferencia simétrica  $\{a_1, \dots, a_r\} \triangle \{d_1, \dots, d_g\}$  transforman los conjuntos  $M$  en los cuales pueden aparecer elementos simples. Formando de nuevo la diferencia simétrica efectuamos otras transformaciones. Continuamos el proceso hasta que se cumpla (17).

$$\forall i \exists j N_{i,y} = N_{j,z}, N_{i,y}^* = N_{j,z}^* \quad (17)$$

Otras transformaciones de (10) y (11) se efectúan con las matrices  $C$  y  $D$  [1] y se construyen las sucesiones de sustituciones con el cumplimiento de (7).

### 3. Aplicaciones en grafos

Vamos a ver cómo se aplican los conjuntos de relaciones en la solución del problema del isomorfismo para grafos. Están dados dos grafos  $G$  y  $G^*$  por sus matrices de adyacencias o por sus matrices de los pesos de las aristas. Designemos las filas y las columnas de ambas matrices por  $y_1, \dots, y_n$  e  $z_1, \dots, z_n$  respectivamente. Supongamos que según una hipótesis se obtienen las sustituciones (10) y (11).

$$A_G = \begin{matrix} & & & z_1 & \cdots & z_n \\ & & & x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & x_1 & \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\ \vdots & \vdots & \\ y_n & x_n & \end{matrix} \quad A_{G^*} = \begin{matrix} & & & z_1 & \cdots & z_n \\ & & & x_1^* & \cdots & x_n^* \\ y_1 & x_1^* & \left[ \begin{array}{ccc} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ & \ddots & \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{array} \right] \\ \vdots & \vdots & \\ y_n & x_n^* & \end{matrix}$$

Designamos

$$M_{1,y} = X_1, \dots, M_{u,y} = X_u, M_{1,z} = X_{u+1}, \dots, M_{v,z} = X_{u+v}$$

$$M_{1,y}^* = X_1^*, \dots, M_{u,y}^* = X_u^*, M_{1,z}^* = X_{u+1}^*, \dots, M_{v,z}^* = X_{u+v}^*$$

Se obtienen los conjuntos  $X = \{X_1, \dots, X_{u+v}\}$  y  $X^* = \{X_1^*, \dots, X_{u+v}^*\}$  para los cuales se verifican las correspondencias  $X_i \longleftrightarrow X_i^*, i = 1, 2, \dots, u + v$ . Por eso en este caso

$$S_{X,X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_{u*v} \\ X_1^* & X_2^* & \dots & X_{u+v}^* \end{pmatrix} \quad (18)$$

Por las matrices  $A_G$  y  $A_{G^*}$  hallamos las matrices  $R_{X_i X_j}$  y  $R_{X_i^* X_j^*}^*$  y componemos los conjuntos de relaciones  $R$  y  $R^*$  ( $i = 1, \dots, u; j = u + 1, \dots, u + v$ ). A estos conjuntos corresponden dos grafos bipartidos  $G_1$  y  $G_1^*$ .

Los pesos de las aristas son elementos de  $R$  y  $R^*$ . Si  $R \cong R^*$  entonces  $G_1 \cong G_1^*$  y  $G \cong G^*$ . Si los conjuntos no son isomorfos entonces la hipótesis según la cual se obtuvieron las sustituciones (10) y (11) es falsa y tenemos que verificar otra hipótesis. De esta manera el problema del isomorfismo de dos grafos se reduce al problema del isomorfismo de dos conjuntos de relaciones. Es conveniente hacer esto cuando los grafos son de grandes tamaños o cuando las matrices de adyacencias o de pesos de las aristas son homogéneas. La investigación de los grafos de grandes tamaños se reduce a la investigación de grafos de tamaños razonables con unas restricciones adicionales que permiten excluir muchas variantes. Las matrices homogéneas se reducen a las no homogéneas (ver Ejemplo 2).

Un sistema de grafos es un conjunto de relaciones y, por eso, lo expuesto puede aplicarse en la solución del problema del isomorfismo para tales sistemas (ver Ejemplo 1).

#### 4. Aplicaciones en funciones de lógicas de $k$ -signos

La función  $f(x_1, \dots, x_n)$  de una lógica de  $k$ -signos (3) se puede considerar como un conjunto de relaciones. Tal función puede ser prefijada por los conjuntos  $M_f^\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0, 1, \dots, k-1$ ) del modo siguiente:  $M_f^\varepsilon = \{\alpha : f(\alpha) = \varepsilon\}$  donde  $\alpha$  es un cortejo  $n$ -dimensional de  $k$  signos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Designemos

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \dots, x_n\} \\ Y_0 &= \{y_{10}, \dots, y_{p0}\} = M_f^0 \\ Y_1 &= \{y_{11}, \dots, y_{q1}\} = M_f^1 \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{k-1} &= \{y_{1k-1}, \dots, y_{rk-1}\} = M_f^{k-1} \\ M &= \{X, Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}\} \\ R &= \{R_{Y_0X}, R_{Y_1X}, \dots, R_{Y_{k-1}X}\} \\ \Omega &= \{0, 1, \dots, k-1\} \end{aligned}$$

Igualmente para otra función  $f^*(x_1, \dots, x_n)$  hallamos el conjunto  $R^*$ . A estos conjuntos corresponden dos grafos bipartidos  $G$  y  $G^*$  con sus matrices de adyacencias  $A_G$  y  $A_{G^*}$ .

$$A_G = \begin{array}{ccccc} & X & Y_0 & \cdots & Y_{k-1} \\ X & & & & \\ Y_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ Y_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \quad A_{G^*} = \begin{array}{ccccc} & X^* & Y_0^* & \cdots & Y_{k-1}^* \\ X^* & & & & \\ Y_0^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ Y_{k-1}^* & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

Para que las funciones sean isomorfas es necesario que se realicen las correspondencias

$$X \longleftrightarrow X^*, Y_0 \longleftrightarrow Y_0^*, Y_1 \longleftrightarrow Y_1^*, \dots, Y_{k-1} \longleftrightarrow Y_{k-1}^*$$

Es decir

$$S_{M,M^*} = \begin{pmatrix} X & Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_{k-1} \\ X^* & Y_0^* & Y_1^* & \cdots & Y_{k-1}^* \end{pmatrix}$$

El sistema de equivalencias por esta sustitución es

$$\begin{cases} R_{Y_0 X} \cong R_{Y_0^* X^*} \\ R_{Y_1 X} \cong R_{Y_1^* X^*} \\ \dots \\ R_{Y_{k-1} X} \cong R_{Y_{k-1}^* X^*} \end{cases} \quad (19)$$

Es evidente que en este sistema deben verificarse las condiciones

$$X = X^*, |Y_0| = |Y_0^*|, |Y_1| = |Y_1^*|, \dots, |Y_{k-1}| = |Y_{k-1}^*| \quad (20)$$

Para hallar la solución del sistema (19) componemos las matrices  $A_{P_G}$  y  $A_{P_{G^*}}$ .

$$A_{P_G} = \begin{matrix} & X \\ Y_0 & R_{Y_0 X} \\ Y_1 & R_{Y_1 X} \\ \vdots & \vdots \\ Y_{k-1} & R_{Y_{k-1} X} \end{matrix} \quad A_{P_{G^*}} = \begin{matrix} & X \\ Y_0^* & R_{Y_0^* X} \\ Y_1^* & R_{Y_1^* X} \\ \vdots & \vdots \\ Y_{k-1}^* & R_{Y_{k-1}^* X} \end{matrix}$$

Pasemos a la forma desarrollada y investiguemos las matrices en la equivalencia. Si éstas son equivalentes entonces las funciones son isomorfas.

## 5. Ejemplos

**Ejemplo 1** Investigar en el isomorfismo los sistemas de grafos prefijados por

$$\begin{aligned} R &= \{R_{X_1 X_1}, R_{X_2 X_2}, R_{X_3 X_3}, R_{X_1 X_2}, R_{X_2 X_3}, R_{X_3 X_1}\}, \\ R^* &= \{R_{X_1^* X_1^*}, R_{X_2^* X_2^*}, R_{X_3^* X_3^*}, R_{X_2^* X_1^*}, R_{X_1^* X_3^*}, R_{X_3^* X_2^*}\}, \\ X_1 &= \{x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}\}, X_2 = \{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}\}, X_3 = \{x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}\}, \\ X_1^* &= \{x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*\}, X_2^* = \{x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*\}, X_3^* = \{x_{13}^*, x_{23}^*, x_{33}^*, x_{43}^*\}, \\ X &= \{X_1, X_2, X_3\}, X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}, \\ \Omega &= \{0, 1\}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
R_{X_1 X_1} &= \begin{matrix} & x_{11}x_{21}x_{31}x_{41} \\ \begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_2 X_2} = \begin{matrix} & x_{12}x_{22}x_{32}x_{42} \\ \begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
R_{X_3 X_3} &= \begin{matrix} & x_{13}x_{23}x_{33}x_{43} \\ \begin{matrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_1 X_2} = \begin{matrix} & x_{12}x_{22}x_{32}x_{42} \\ \begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
R_{X_2 X_3} &= \begin{matrix} & x_{13}x_{23}x_{33}x_{43} \\ \begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_3 X_1} = \begin{matrix} & x_{11}x_{21}x_{31}x_{41} \\ \begin{matrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
R_{X_1^* X_1^*} &= \begin{matrix} & x_{11}^*x_{21}^*x_{31}^*x_{41}^* \\ \begin{matrix} x_{11}^* \\ x_{21}^* \\ x_{31}^* \\ x_{41}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_2^* X_2^*} = \begin{matrix} & x_{12}^*x_{22}^*x_{32}^*x_{42}^* \\ \begin{matrix} x_{12}^* \\ x_{22}^* \\ x_{32}^* \\ x_{42}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
R_{X_3^* X_3^*} &= \begin{matrix} & x_{13}^*x_{23}^*x_{33}^*x_{43}^* \\ \begin{matrix} x_{13}^* \\ x_{23}^* \\ x_{33}^* \\ x_{43}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_2^* X_1^*} = \begin{matrix} & x_{11}^*x_{21}^*x_{31}^*x_{41}^* \\ \begin{matrix} x_{12}^* \\ x_{22}^* \\ x_{32}^* \\ x_{42}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
R_{X_1^* X_3^*} &= \begin{matrix} & x_{13}^*x_{23}^*x_{33}^*x_{43}^* \\ \begin{matrix} x_{11}^* \\ x_{21}^* \\ x_{31}^* \\ x_{41}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, R_{X_3^* X_2^*} = \begin{matrix} & x_{12}^*x_{22}^*x_{32}^*x_{42}^* \\ \begin{matrix} x_{13}^* \\ x_{23}^* \\ x_{33}^* \\ x_{43}^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

**Solución.** Construimos las matrices de adyacencias  $A_G$  y  $A_{G^*}$ .

$$A_G = \begin{matrix} & X_1 X_2 X_3 \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad A_{G^*} = \begin{matrix} & X_1^* X_2^* X_3^* \\ \begin{matrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por medio de las matrices  $C$  [1] hallamos que  $A_G \cong A_{G^*}$ . El conjunto  $\{S_{X, X^*}\}$  contiene tres sustituciones:

$$a) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2^* & X_1^* & X_3^* \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1^* & X_3^* & X_2^* \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_3^* & X_2^* & X_1^* \end{pmatrix}$$

Construimos los sistemas de equivalencias por cada una de estas sustituciones

$$a) \left\{ \begin{array}{l} R_{X_1 X_1} \cong R_{X_2^* X_2^*} \\ R_{X_2 X_2} \cong R_{X_1^* X_1^*} \\ R_{X_3 X_3} \cong R_{X_3^* X_3^*} \\ R_{X_1 X_2} \cong R_{X_2^* X_1^*} \\ R_{X_2 X_3} \cong R_{X_1^* X_3^*} \\ R_{X_3 X_1} \cong R_{X_3^* X_2^*} \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} R_{X_1 X_1} \cong R_{X_1^* X_1^*} \\ R_{X_2 X_2} \cong R_{X_3^* X_3^*} \\ R_{X_3 X_3} \cong R_{X_2^* X_2^*} \\ R_{X_1 X_2} \cong R_{X_1^* X_3^*} \\ R_{X_2 X_3} \cong R_{X_3^* X_2^*} \\ R_{X_3 X_1} \cong R_{X_2^* X_1^*} \end{array} \right. \quad c) \left\{ \begin{array}{l} R_{X_1 X_1} \cong R_{X_3^* X_3^*} \\ R_{X_2 X_2} \cong R_{X_2^* X_2^*} \\ R_{X_3 X_3} \cong R_{X_1^* X_1^*} \\ R_{X_1 X_2} \cong R_{X_3^* X_2^*} \\ R_{X_2 X_3} \cong R_{X_2^* X_1^*} \\ R_{X_3 X_1} \cong R_{X_1^* X_3^*} \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema a). Construimos las matrices  $A_{P_G}$  y  $A_{P_G^*}$ .

$$A_{P_G} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \end{array} & \begin{array}{cccc} z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \end{array} & \begin{array}{cccc} z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{array} & \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{array} & \left[ \begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \\ A_{P_G^*} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_{12}^* & x_{22}^* & x_{32}^* & x_{42}^* \end{array} & \begin{array}{cccc} z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ x_{11}^* & x_{21}^* & x_{31}^* & x_{41}^* \end{array} & \begin{array}{cccc} z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ x_{13}^* & x_{23}^* & x_{33}^* & x_{43}^* \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{array} & \begin{array}{c} x_{12}^* \\ x_{22}^* \\ x_{32}^* \\ x_{42}^* \\ x_{11}^* \\ x_{21}^* \\ x_{31}^* \\ x_{41}^* \\ x_{13}^* \\ x_{23}^* \\ x_{33}^* \\ x_{43}^* \end{array} & \left[ \begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array}$$

Al investigar las matrices sobre equivalencia por medio de las matrices  $B$  y  $C$  hallamos las sustituciones

$$S_{Y,Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_4 & y_3 & y_1 & y_2 & y_5 & y_7 & y_8 & y_6 & y_9 & y_{12} & y_{10} & y_{11} \end{pmatrix}$$

$$S_{Z,Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ z_4 & z_3 & z_1 & z_2 & z_5 & z_7 & z_8 & z_6 & z_9 & z_{12} & z_{10} & z_{11} \end{pmatrix}$$

La condición (7) se cumple. Por lo tanto  $A_{P_G} \cong A_{P_{G^*}}^*$ , el sistema a) es compatible y los sistemas de grafos son isomorfos y no es necesario resolver los sistemas b) y c). De las sustituciones obtenidas resulta la solución del sistema a):

$$S_{X_1 X_2^*} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{42}^* & x_{32}^* & x_{12}^* & x_{22}^* \end{pmatrix}, S_{X_2 X_1^*} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{41}^* & x_{31}^* & x_{11}^* & x_{21}^* \end{pmatrix},$$

$$S_{X_3 X_3^*} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{43}^* & x_{33}^* & x_{13}^* & x_{23}^* \end{pmatrix}$$

Por medio de estas sustituciones un sistema de grafos se transforma en otro.

**Ejemplo 2** Investigar en el isomorfismo los grafos  $G$  y  $G^*$  prefijados por las matrices  $A_G$  y  $A_{G^*}$  de los pesos de las aristas:

$$A_G = \begin{matrix} & & & & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ & & & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & x_1 & \left[ \begin{array}{c} \Sigma \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} \right. & \begin{array}{c} \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \end{array} & \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Phi \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Phi \\ \Sigma \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} \\ y_2 & x_2 & & & & & & & & & & & \\ y_3 & x_3 & & & & & & & & & & & \\ y_4 & x_4 & & & & & & & & & & & \\ y_5 & x_5 & & & & & & & & & & & \\ y_6 & x_6 & & & & & & & & & & & \\ y_7 & x_7 & & & & & & & & & & & \\ y_8 & x_8 & & & & & & & & & & & \\ y_9 & x_9 & & & & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$A_{G^*} = \begin{matrix} & & & & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ & & & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & x_1 & \left[ \begin{array}{c} \Sigma \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Phi \\ \Sigma \end{array} \right. & \begin{array}{c} \Phi \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{array} & \begin{array}{c} \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \end{array} & \begin{array}{c} \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{array} & \begin{array}{c} \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \\ \Phi \end{array} & \begin{array}{c} \Delta \\ \Sigma \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array} & \begin{array}{c} \Delta \\ \Sigma \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Phi \\ \Delta \\ \Delta \\ \Sigma \end{array} \\ y_2 & x_2 & & & & & & & & & & & \\ y_3 & x_3 & & & & & & & & & & & \\ y_4 & x_4 & & & & & & & & & & & \\ y_5 & x_5 & & & & & & & & & & & \\ y_6 & x_6 & & & & & & & & & & & \\ y_7 & x_7 & & & & & & & & & & & \\ y_8 & x_8 & & & & & & & & & & & \\ y_9 & x_9 & & & & & & & & & & & \end{matrix}$$

**Solución.**  $\Omega = \{\Sigma, \Phi, \Delta\}$ . Los grafos son homogéneos. Por eso desde el principio las matrices  $B$  no sirven para despejar los elementos simples. Designamos por  $y_1, \dots, y_9$  las filas y por  $z_1, \dots, z_9$  las columnas de las matrices. Las primeras sustituciones múltiples son:

$$\tilde{S}_{1;Y,Y} = \begin{pmatrix} \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\} \\ \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_{1;Z,Z} = \begin{pmatrix} \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\} \\ \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\} \end{pmatrix}$$

Sea  $y_1 \longleftrightarrow y_1$ . Entonces según (4)  $z_1 \longleftrightarrow z_1$ . Construimos la tabla  $T_1$  de las matrices  $C$  (la parte de arriba).

$G$	$y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$	$G^*$	$y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$
$y_1$		$\Sigma \Sigma \Delta \Delta \Phi \Phi \Phi$	$y_1$		$\Phi \Delta \Phi \Sigma \Delta \Sigma \Phi \Delta$
$z_1$	$\Phi \Phi \Phi \Delta \Delta \Delta \Sigma \Sigma$		$z_1$	$\Delta \Delta \Sigma \Phi \Phi \Delta \Phi \Sigma$	
$G$	$y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$	$G^*$	$y_1 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_1 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$
$y_1$		$\Sigma \Sigma \Delta \Delta \Delta \Phi \Phi \Phi$	$y_2$		$\Delta \Phi \Sigma \Delta \Phi \Delta \Phi \Sigma$
$z_1$	$\Phi \Phi \Phi \Delta \Delta \Delta \Sigma \Sigma$		$z_2$	$\Phi \Sigma \Phi \Delta \Sigma \Phi \Delta \Delta$	
$G$	$y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$	$G^*$	$y_1 y_2 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9$	$z_1 z_2 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$
$y_1$		$\Sigma \Sigma \Delta \Delta \Delta \Phi \Phi \Phi$	$y_3$		$\Delta \Sigma \Sigma \Phi \Phi \Delta \Phi \Delta$
$z_1$	$\Phi \Phi \Phi \Delta \Delta \Delta \Sigma \Sigma$		$z_3$	$\Delta \Phi \Phi \Delta \Sigma \Delta \Sigma \Phi$	

$T_1$

De esta tabla se obtienen las sustituciones

$$\begin{aligned} \hat{S}_{2;Y,Y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \{y_2, y_3, y_4\} & \{y_5, y_6, y_7\} & \{y_8, y_9\} \\ y_1 & \{y_5, y_6, y_8\} & \{y_2, y_3, y_7\} & \{y_4, y_9\} \end{pmatrix} y \\ \hat{S}_{2;Z,Z} &= \begin{pmatrix} z_1 & \{z_4, z_5, z_6\} & \{z_7, z_8, z_9\} & \{z_2, z_3\} \\ z_1 & \{z_3, z_6, z_9\} & \{z_2, z_4, z_8\} & \{z_5, z_7\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos que  $|\{2, 3, 4\} \cap \{7, 8, 9\}| \neq |\{5, 6, 8\} \cap \{2, 4, 8\}|$ . Es decir la condición (12) no se cumple. Por eso  $z_1 \longleftrightarrow z_1$  e  $y_1 \longleftrightarrow y_1$  no existen. Análogamente hallamos que tampoco existen  $z_1 \longleftrightarrow z_2$  e  $y_1 \longleftrightarrow y_2$ . Examinemos las correspondencias  $z_1 \longleftrightarrow z_3$  e  $y_1 \longleftrightarrow y_3$ . De  $T_1$  (la parte de abajo) resulta que

$$\begin{aligned} \hat{S}_{4;Y,Y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \{y_2, y_3, y_4\} & \{y_5, y_6, y_7\} & \{y_8, y_9\} \\ y_3 & \{y_2, y_4, y_9\} & \{y_1, y_5, y_7\} & \{y_6, y_8\} \end{pmatrix} y \\ \hat{S}_{4;Z,Z} &= \begin{pmatrix} z_1 & \{z_4, z_5, z_6\} & \{z_7, z_8, z_9\} & \{z_2, z_3\} \\ z_3 & \{z_1, z_7, z_9\} & \{z_5, z_6, z_8\} & \{z_2, z_4\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para estas sustituciones la condición (12) se cumple. Aplicando (13), (14) y (15) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{4;Y,Y} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_4 & y_7 & \{y_2, y_3\} & \{y_5, y_6\} & \{y_8, y_9\} \\ y_3 & y_9 & y_5 & \{y_2, y_4\} & \{y_1, y_7\} & \{y_6, y_8\} \end{pmatrix} y \\ \hat{S}_{4;Z,Z} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_7 & \{z_2, z_3\} & \{z_5, z_6\} & \{z_8, z_9\} \\ z_3 & z_9 & z_5 & \{z_2, z_4\} & \{z_1, z_7\} & \{z_6, z_8\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las condiciones (20) se cumplen. Construimos las matrices de los pesos y las matrices  $B$ .

$$A_{P_{G_1}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_2 & z_3 & z_5 & z_6 & z_8 & z_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_2 \\ y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_8 \\ y_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \\ \Phi & \Sigma \\ \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \\ \Delta & \Delta \\ \Sigma & \Delta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta & \Delta \\ \Sigma & \Delta \\ \Sigma & \Sigma \\ \Delta & \Sigma \\ \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Delta & \Phi \\ \Phi & \Delta \\ \Sigma & \Delta \\ \Sigma & \Sigma \\ \Delta & \Sigma \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
A_{P_{G_1^*}} &= \begin{bmatrix} y_2 & \begin{bmatrix} z_2 & z_4 \\ \Sigma & \Sigma \end{bmatrix} \\ y_4 & \begin{bmatrix} \Phi & \Sigma \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \end{bmatrix} \\ y_7 & \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \end{bmatrix} \\ y_6 & \begin{bmatrix} \Sigma & \Delta \end{bmatrix} \\ y_8 & \begin{bmatrix} \Delta & \Delta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_7 \\ \Delta & \Delta \\ \Sigma & \Delta \\ \Sigma & \Sigma \\ \Delta & \Sigma \\ \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_6 & z_8 \\ \Phi & \Phi \\ \Phi & \Delta \\ \Delta & \Phi \\ \Delta & \Sigma \\ \Sigma & \Delta \\ \Sigma & \Sigma \end{bmatrix} \\
B_Y &= \begin{bmatrix} y_2 & \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y_3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ y_5 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ y_6 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ y_8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ y_9 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
B_Y^* &= \begin{bmatrix} y_2 & \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y_4 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ y_7 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ y_6 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y_8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_Z &= \begin{bmatrix} \Sigma & \begin{bmatrix} z_2 & z_3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_5 & z_6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_8 & z_9 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
B_Z^* &= \begin{bmatrix} \Sigma & \begin{bmatrix} z_2 & z_4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Phi & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_6 & z_8 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De  $\hat{S}_{4;Y,Y}$  e  $\hat{S}_{4;Z,Z}$  y de las matrices  $B$  resultan las sustituciones simples:

$$\begin{aligned}
S_{Z,Z} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ z_3 & z_2 & z_4 & z_9 & z_1 & z_7 & z_5 & z_8 & z_6 \end{pmatrix} \\
S_{Y,Y} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ y_3 & y_2 & y_4 & y_9 & y_1 & y_7 & y_5 & y_8 & y_6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido dos sucesiones convergentes [1] para las cuales se cumple (7). Por consiguiente  $G_1 \cong G_1^*$  y  $G \cong G^*$ .

## 6. Conclusión

Lo expuesto se puede aplicar:

1. En sistemas algebraicos [3, 4],
2. En la solución del problema del isomorfismo:
  - a) para grafos y hipergrafos de grandes tamaños [3, 6],
  - b) para sistemas de grafos y hipergrafos,
  - c) para grafos homogéneos [5, 6],
  - d) para funciones lógicas y sistemas de ellas [2].

Sería bueno aplicar matrices multidimensionales en la resolución de sistemas de equivalencias. En este dominio todavía faltan investigaciones.

## Referencias

- [1] Bulat, M. (1998) “Isomorfismo de grafos y de funciones lógicas con algunas aplicaciones”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **5**(2): 87–112.
- [2] Bulat M.S.; Goryuk I.V. (1978) *Síntesis de Estructuras Lógicas* Instituto Politécnico de Kishinev. (En ruso).
- [3] Gorbátov, V.A. (1988) *Fundamentos de la Matemática Discreta*. Editorial MIR, Moscu.
- [4] Máltsev, A.I. (1970) *Sistemas Algebraicos*. Editorial NAUKA, Moscu (en ruso).
- [5] Skliar, O.; Lascaris, T.; Medina, V. (1994) “Enfoque compartimental para la solución del problema del isomorfismo de grafos”, in: G. Mora (Ed.) *II Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*, I parte, Sede de Occidente UCR: 113–131.
- [6] Zykov, A.A. (1987) *Fundamentos de la Teoría de los Grafos*. Editorial NAUKA, Moscú (en ruso).